Wahlaufgaben

Aufgabe 2019 W2a:

5,5 P

In einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide liegt das gleichschenklige Dreieck BCM.

Es gilt:

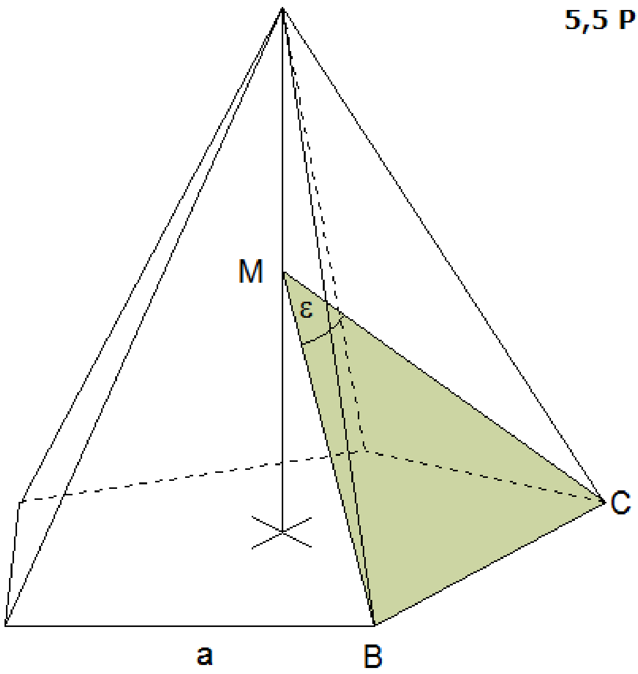
$$\overline{BM} = \overline{CM} = 8,0\,cm$$
$$\varepsilon = 48,0^\circ$$

M halbiert die Höhe der Pyramide

Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.

Der Punkt M bewegt sich auf der Höhe der Pyramide. Dadurch entsteht das Dreieck BCM'.

Berechnen Sie den minimalen und den maximalen Flächeninhalt, den das Dreieck BCM' annehmen kann.



Strategie 2019 W2a:

Gegeben:

$$\overline{BM} = \overline{CM} = 8,0\,cm$$
$$\varepsilon = 48,0^\circ$$

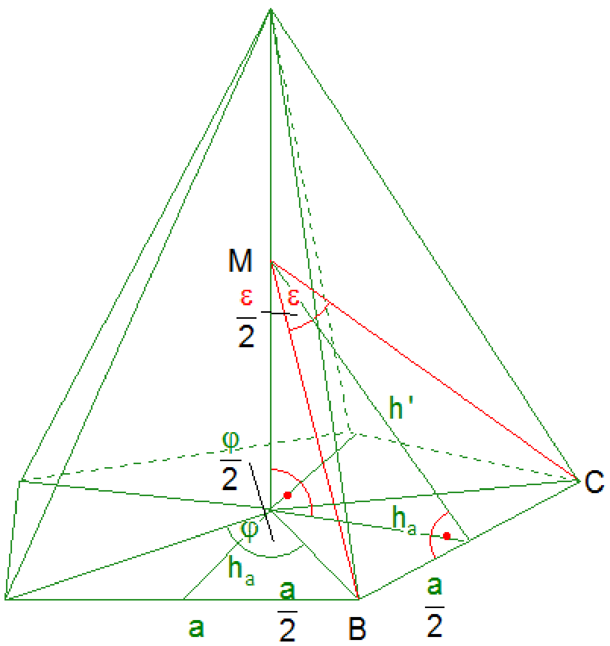
Gesucht:

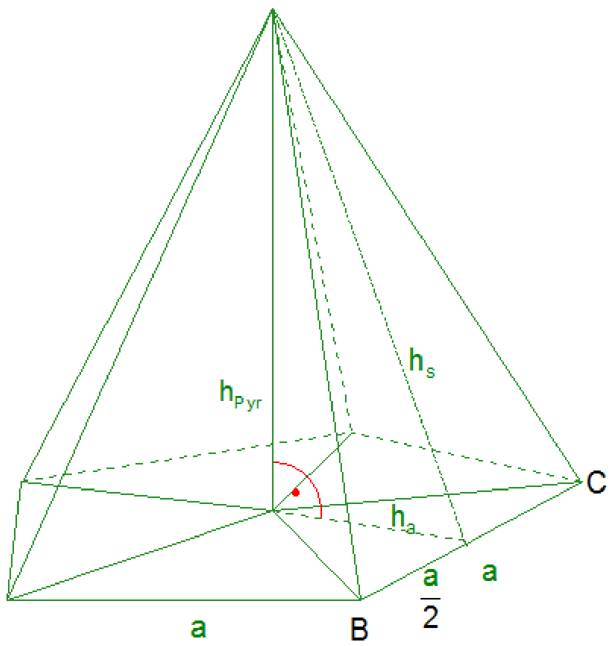
h_{Pyr}

A_{min}

A_{max}

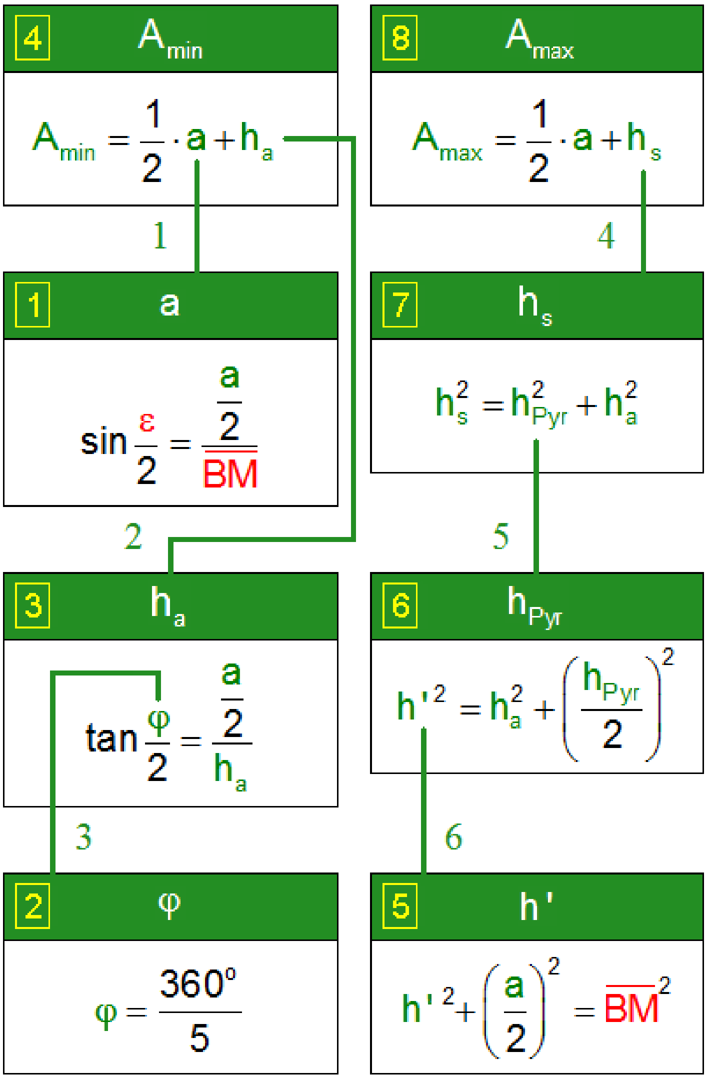
Skizze:





Strategie 2019 W2a:

Struktogramm:



Lösung 2019 W2a:

1. Berechnung der Pyramidengrundseite a:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a}{2}}{\overline{BM}}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$\sin\frac{48^\circ}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{8}$$

$$\sin 24^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{8}$$

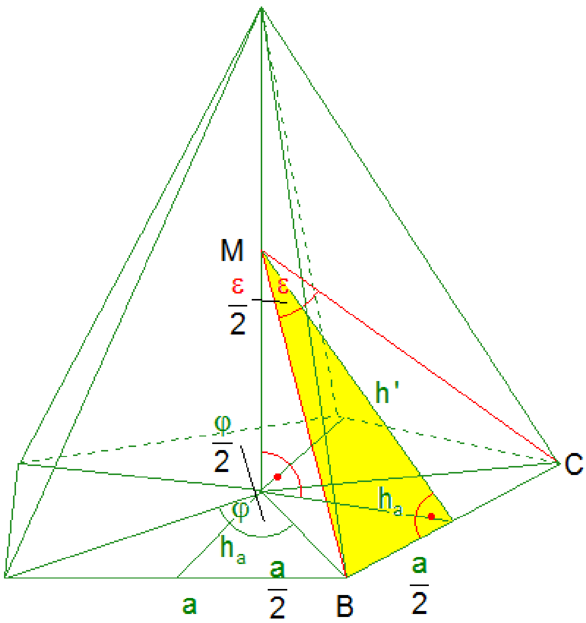
$$0,4067 = \frac{\frac{a}{2}}{8}$$

Seiten tauschen

$$\frac{\frac{a}{2}}{8} = 0,4067 \qquad | \cdot 8$$

$$\frac{a}{2} = 3,25 \qquad | \cdot 2$$

$$\underline{a = 6,5\,\text{cm}}$$



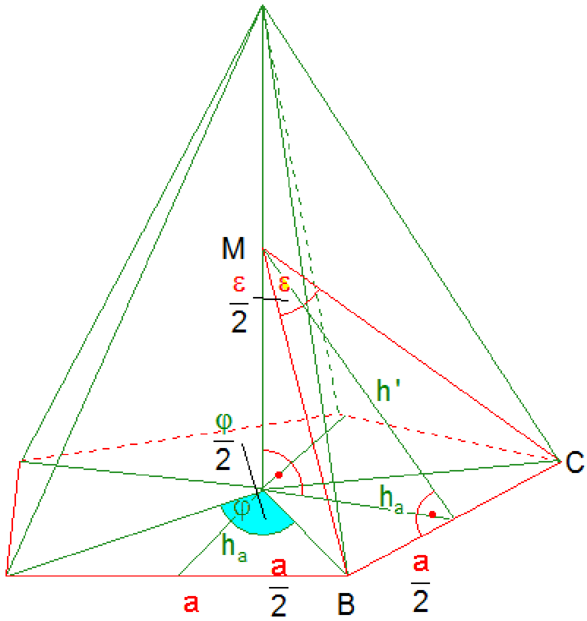
Lösung 2019 W2a:

2. Berechnung des Winkels φ:

$$\varphi = \frac{360^\circ}{5}$$

$$\varphi = 72^\circ$$

Die Grundfläche der Pyramide ist regelmäßig fünfseitig



3. Berechnung der Dreieckshöhe h_a:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

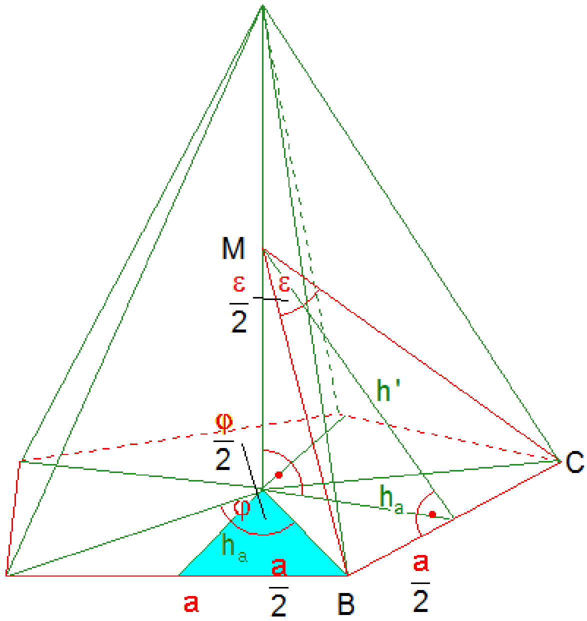
$$\tan\frac{72^\circ}{2} = \frac{\frac{6,5}{2}}{h_a}$$

$$\tan 36^\circ = \frac{3,25}{h_a}$$

$$0,7265 = \frac{3,25}{h_a} \qquad |\cdot h_a$$

$$h_a \cdot 0,7265 = 3,25 \qquad |:0,7265$$

$$h_a = 4,47\,\text{cm}$$



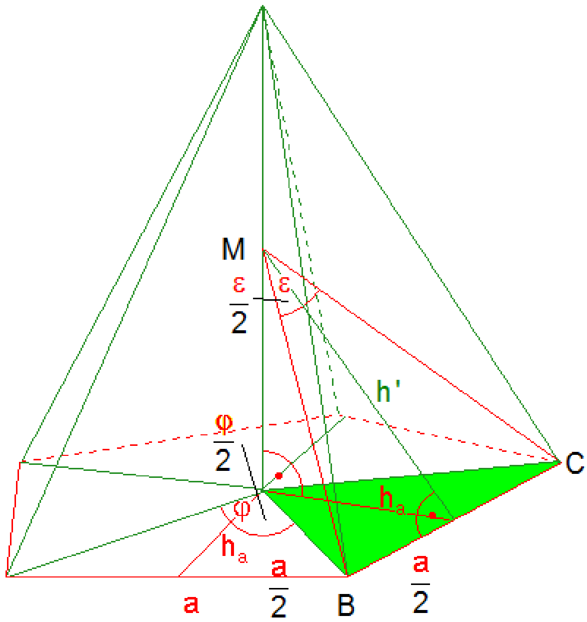
4. Berechnung der Dreiecksfläche A_{min}:

$$A_{min} = \frac{1}{2}\cdot a \cdot h_a$$

siehe hellgrünes Dreieck

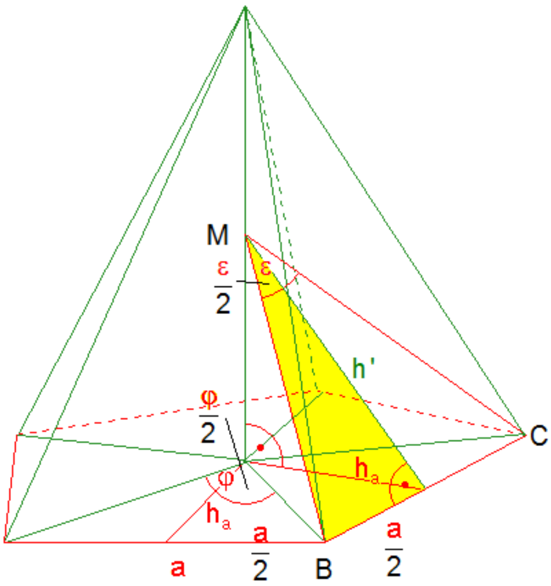
$$A_{min} = \frac{1}{2}\cdot 6,5 \cdot 4,47$$

$$A_{min} = 14,53\,\text{cm}^2$$



Lösung 2019 W2a:

5. Berechnung der Dreieckshöhe h':



$$h'^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \overline{BM}^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$h'^2 + \left(\frac{6,5}{2}\right)^2 = 8^2$$

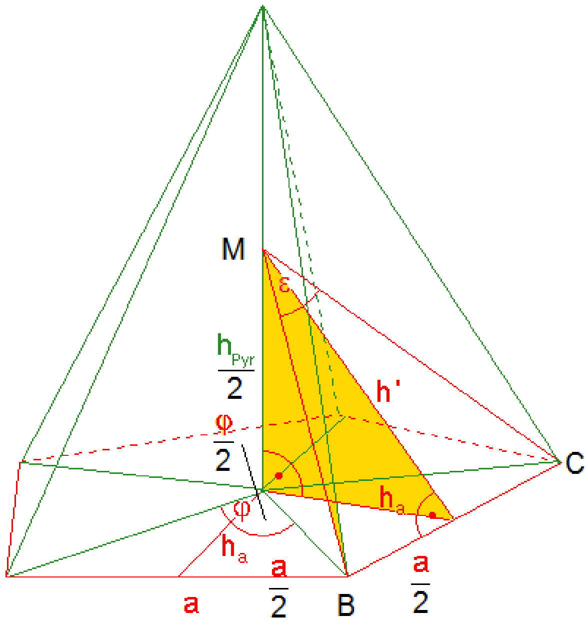
$$h'^2 + 3,25^2 = 8^2$$

$$h'^2 + 10,56 = 64 \qquad \left|\, -10,56\right.$$

$$h'^2 = 53,44 \qquad \left|\, \sqrt{}\right.$$

$$\underline{h' = 7,31\,\text{cm}}$$

6. Berechnung der Pyramidenhöhe h_{Pyr}:



$$\left(\frac{h_{Pyr}}{2}\right)^2 + h_a^2 = h'^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen orangefarbigen Dreieck

$$\left(\frac{h_{Pyr}}{2}\right)^2 + 4,47^2 = 7,31^2$$

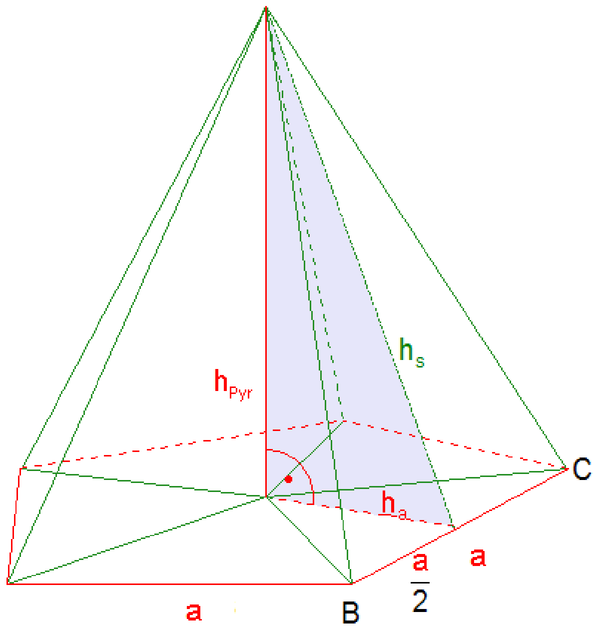
$$\frac{h_{Pyr}^2}{4} + 19,98 = 53,44 \qquad \left|\, -19,98\right.$$

$$\frac{h_{Pyr}^2}{4} = 33,46 \qquad \left|\, \cdot 4\right.$$

$$h_{Pyr}^2 = 133,84 \qquad \left|\, \sqrt{}\right.$$

$$\underline{h_{Pyr} = 11,57\,\text{cm}}$$

7. Berechnung der Dreieckshöhe h_s:



$$h_s^2 = h_{Pyr}^2 + h_a^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen hellgrauen Dreieck

$$h_s^2 = 11,57^2 + 4,47^2$$

$$h_s^2 = 133,86 + 19,98$$

$$h_s^2 = 153,84 \qquad \left|\, \sqrt{}\right.$$

$$\underline{h_s = 12,4\,\text{cm}}$$

Lösung 2019 W2a:

8. Berechnung der Dreiecksfläche A_{max}:

$$A_{max} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

$$A_{max} = \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 12,4$$

$$\underline{\underline{A_{max} = 40,3\,cm^2}}$$