

Wahlaufgaben

Aufgabe 2003 W2b

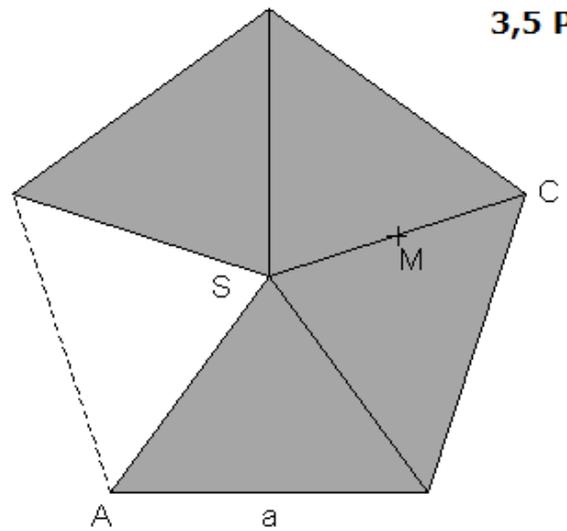
3,5 P

Die vier dunkel eingefärbten Teilflächen eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seitenlänge $a = 7,6 \text{ cm}$ bilden den Mantel einer quadratischen Pyramide.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Der Punkt M liegt auf der Mitte von \overline{CS} .

Berechnen Sie die Länge von \overline{AM} im Körper.



Strategie 2003 W2b:

Gegeben:

Quadratische Pyramide

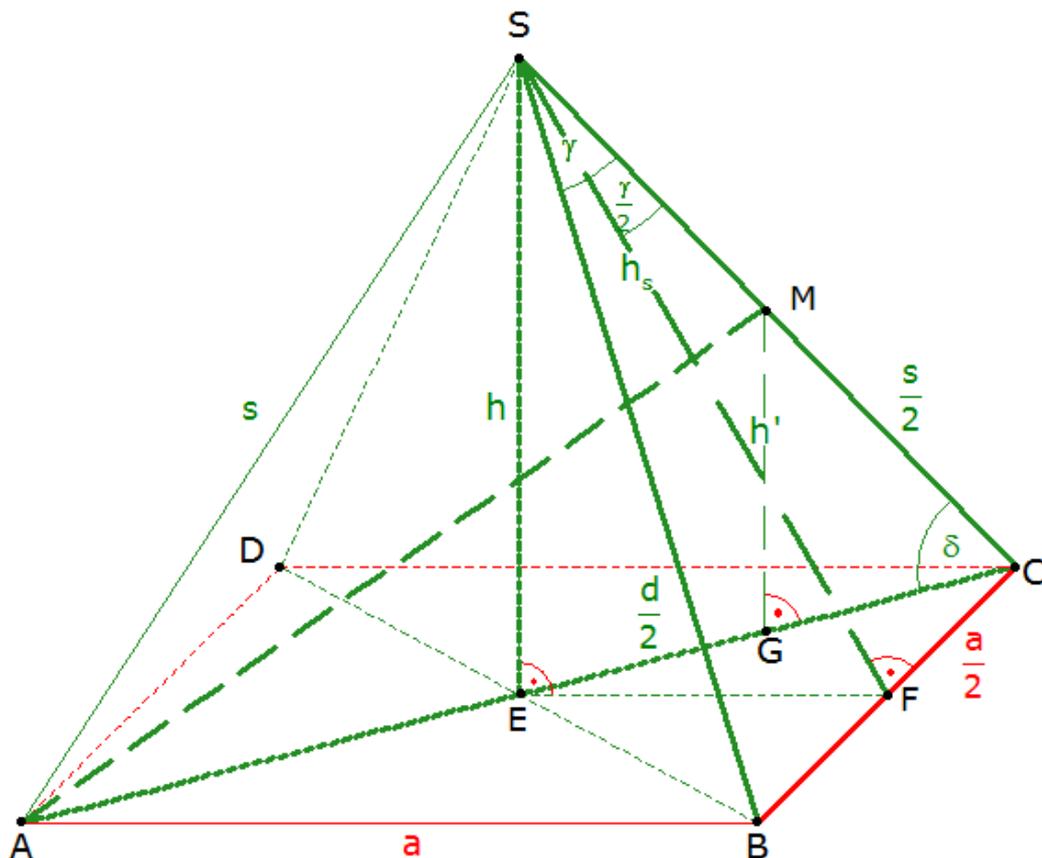
$$a = 7,6 \text{ cm}$$

$$\overline{MC} = \overline{MS}$$

Gesucht:

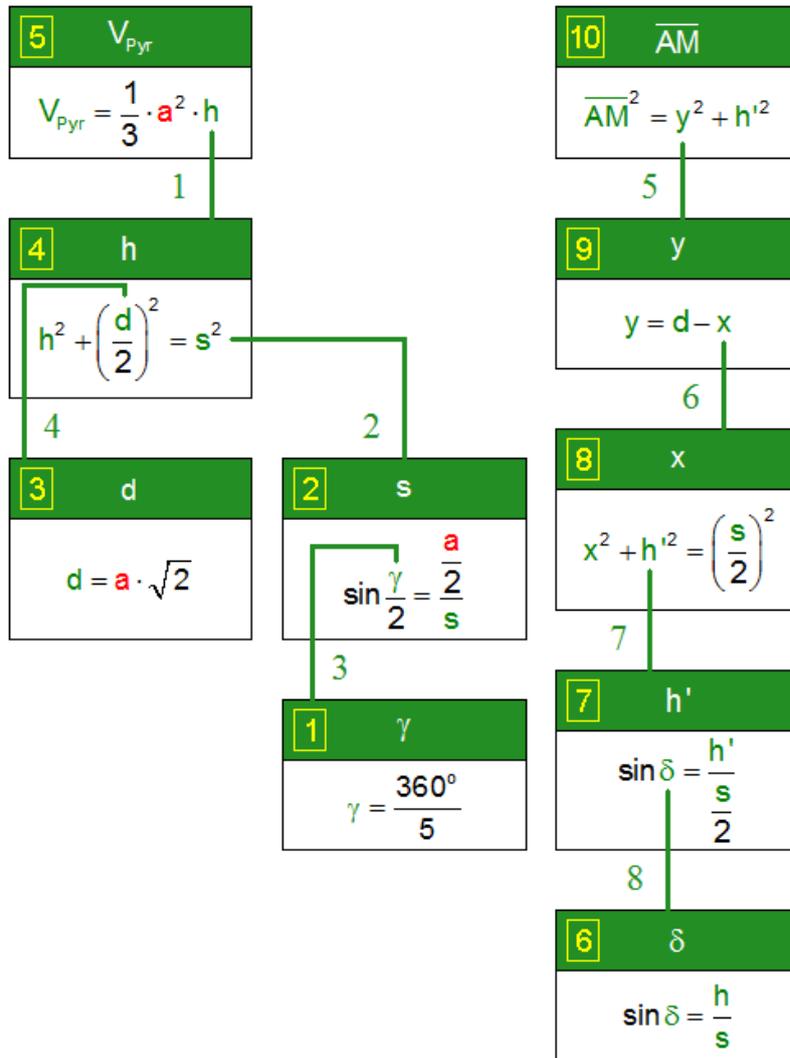
$$\overline{AM}$$

Skizze:



Strategie 2003 W2ab

Struktogramm:

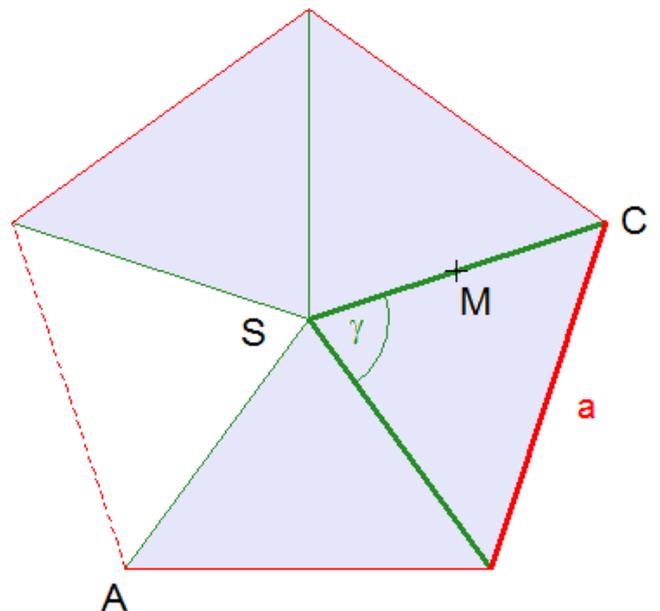


Lösung 2003 W2b:

1. Berechnung des Winkels γ :

$$\gamma = \frac{360^\circ}{5}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 72^\circ}}$$



Lösung 2003 W2b:

2. Berechnung der Pyramiden-Seitenkante s:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a}{2}}{s}$$

Sinusfunktion im
rechtwinkligen gelben
Teildreieck CFS

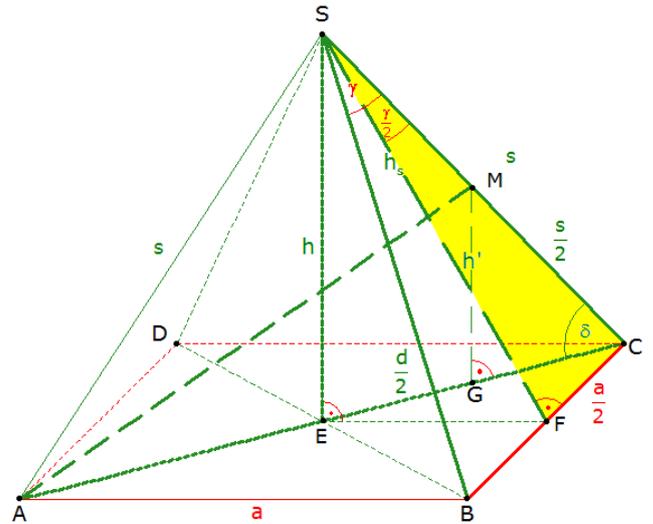
$$\sin \frac{72^\circ}{2} = \frac{7,6}{s}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{3,8}{s}$$

$$0,5878 = \frac{3,8}{s} \quad | \cdot s$$

$$0,5878 \cdot s = 3,8 \quad | : 0,5878$$

$$\underline{s = 6,46 \text{ cm}}$$

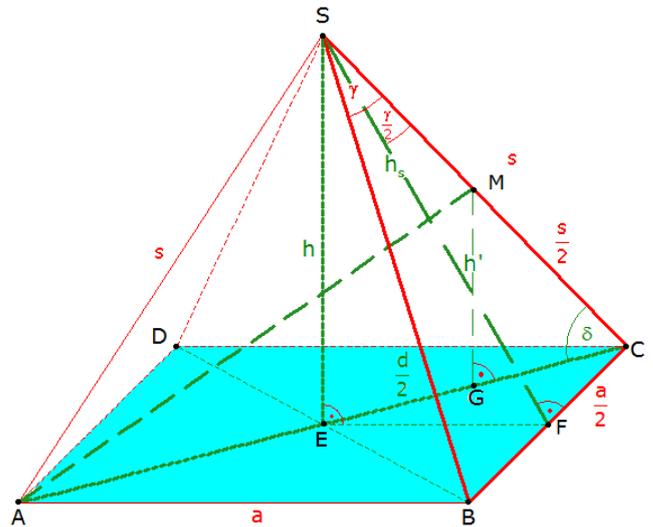


3. Berechnung der Grundseiten-Diagonalen d:

$$d = a \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 7,6 \cdot \sqrt{2}$$

$$\underline{d = 10,75 \text{ cm}}$$



4. Berechnung der Pyramidenhöhe h:

$$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2$$

Pythagoras im
rechtwinkligen
grünen Teildreieck

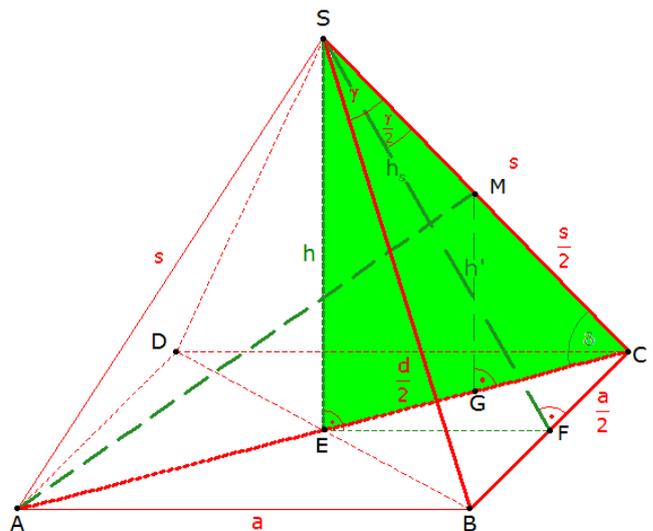
$$h^2 + \left(\frac{10,75}{2}\right)^2 = 6,46^2$$

$$h^2 + 5,375^2 = 6,46^2$$

$$h^2 + 28,89 = 41,73 \quad | - 28,89$$

$$h^2 = 12,84 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\underline{h = 3,58 \text{ cm}}$$



Lösung 2003 W2b:

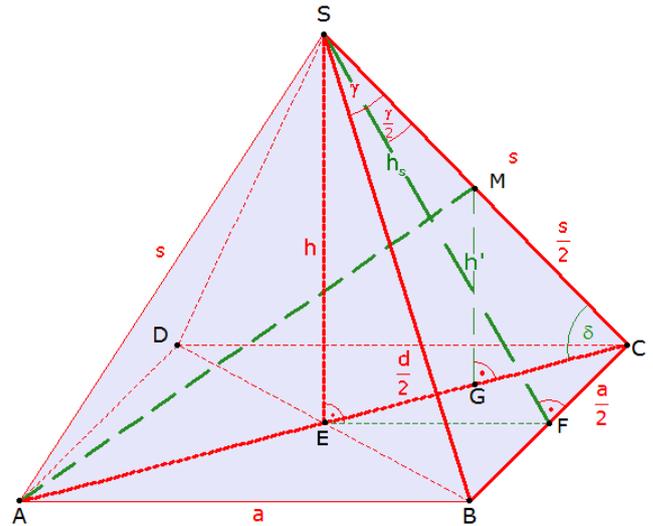
5. Berechnung des Pyramidenvolumens V_{Pyr} :

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot 7,6^2 \cdot 3,58$$

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot 57,76 \cdot 3,58$$

$$\underline{\underline{V_{\text{Pyr}} = 68,93 \text{ cm}^3}}$$



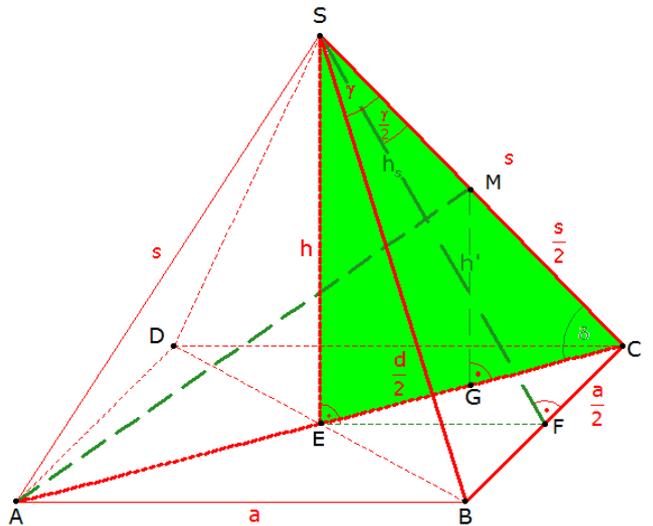
6. Berechnung des Winkels δ :

$$\sin \delta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{s}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck CES

$$\sin \delta = \frac{3,58}{6,46} = 0,5542$$

$$\underline{\underline{\delta = 33,6^\circ}}$$



7. Berechnung der Dreieckshöhe h' :

$$\sin \delta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h'}{\frac{s}{2}}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen orangefarbenen Teildreieck CGM

$$\sin 33,6^\circ = \frac{h'}{\frac{6,46}{2}}$$

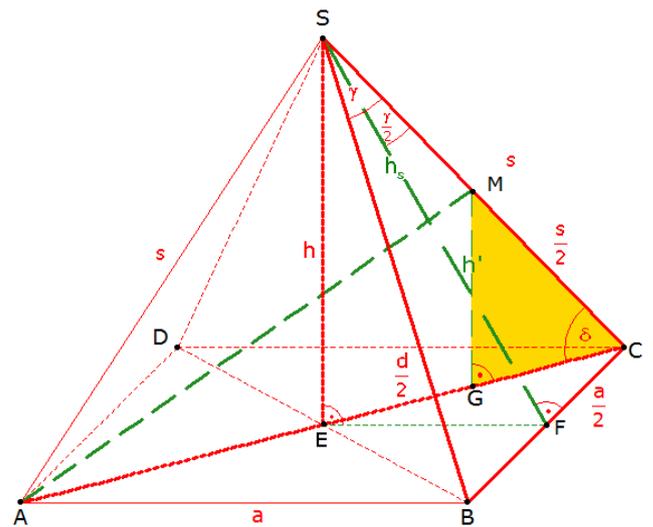
$$0,5534 = \frac{h'}{3,23}$$

$$\frac{h'}{3,23} = 0,5534$$

$$\underline{\underline{h' = 1,79 \text{ cm}}}$$

Seiten tauschen

$$| \cdot 3,23$$



Lösung 2003 W2b:

8. Berechnung der Strecke $\overline{CG} = x$:

$$x^2 + h'^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

Pythagoras im orangefarbenen rechtwinkligen Teildreieck

$$x^2 + 1,79^2 = \left(\frac{6,46}{2}\right)^2$$

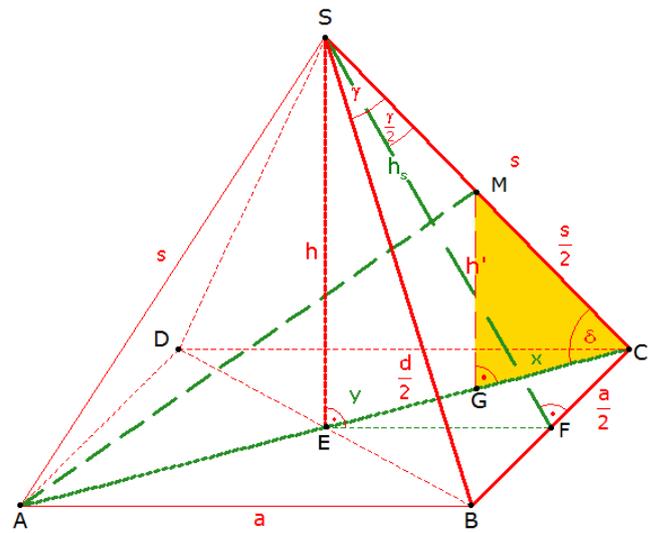
$$x^2 + 1,79^2 = 3,23^2$$

$$x^2 + 3,20 = 10,43 \quad | - 3,20$$

$$x^2 = 7,23$$

$\sqrt{\quad}$

$$\underline{\underline{x = 2,69 \text{ cm}}}$$

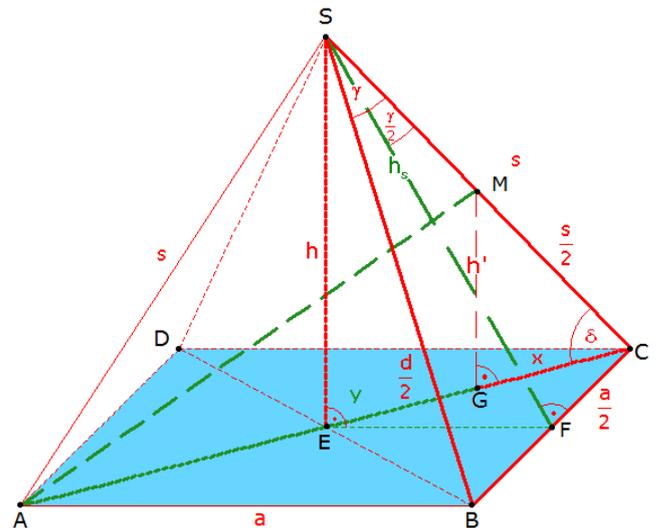


9. Berechnung der Strecke $\overline{AG} = y$:

$$y = d - x$$

$$y = 10,75 - 2,69$$

$$\underline{\underline{y = 8,06 \text{ cm}}}$$



10. Berechnung der Strecke \overline{AM} :

$$\overline{AM}^2 = y^2 + h'^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen flügelroten Teildreieck AGM

$$\overline{AM}^2 = 8,06^2 + 1,79^2$$

$$\overline{AM}^2 = 64,96 + 3,20$$

$$\overline{AM}^2 = 68,16$$

$\sqrt{\quad}$

$$\underline{\underline{\overline{AM} = 8,26 \text{ cm}}}$$

