Aufgabe 1994 2c: **3 P**

Nebenstehende Figur (Halbkreis mit gleichschenkligem Trapez) rotiert um die eingezeichnete Achse. Es gilt:

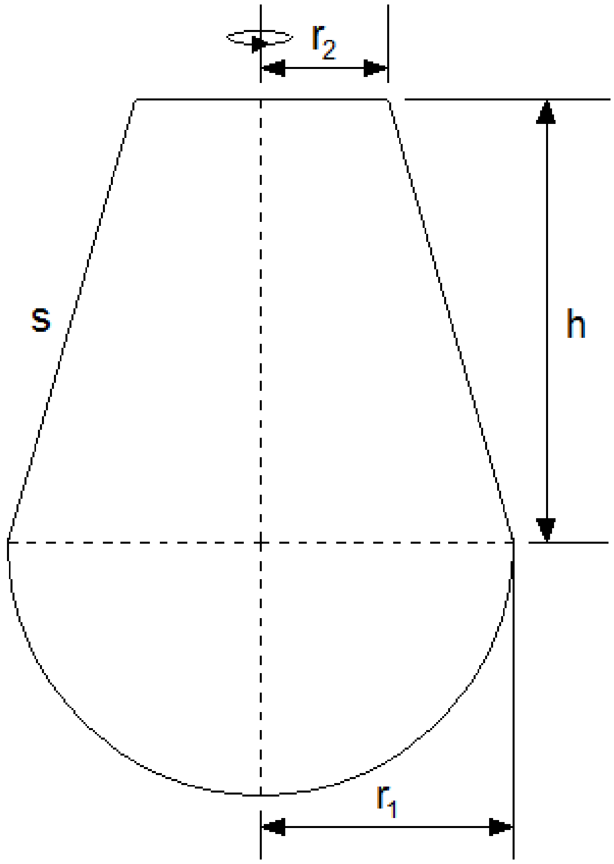
$r_1 = 2e$

$h = 4e$

$V = \frac{44}{3}\pi e^3$ (Volumen des Rotationskörpers)

Berechnen Sie den Radius r_2 und zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, daß für die Mantellinie **s** gilt:

$$s = e\sqrt{17}$$



Strategie 1994 2c:

Gegeben:

Halbkreis mit gleichschenkligem Trapez

$r_1 = 2e$

$h = 4e$

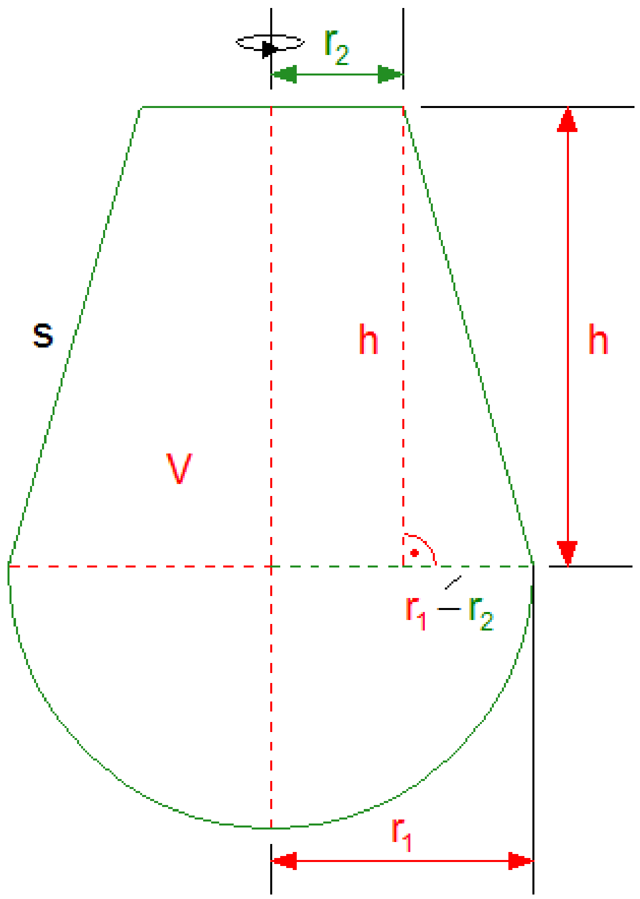
$V = \frac{44}{3}\pi e^3$

Gesucht:

r_2

$s = e\sqrt{17}$

Skizze:



Strategie 1994 2c:

Struktogramm:

1	r_2
	$V = V_{HKugel} + V_{KeSt}$ $V = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r_1^3 + \frac{\pi\cdot h}{3}\left(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2\right)$

2	s
	$s^2 = h^2 + \left(r_1 - r_2\right)^2$

Lösung 1994 2c:

1. Berechnung des Radius r_2:

$V = V_{HKugel} + V_{KeSt}$

$V = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r_1^3 + \frac{\pi\cdot h}{3}\left(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2\right)$

$\frac{44}{3}\cdot\pi\cdot e^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot(2e)^3 + \frac{\pi\cdot 4e}{3}\left((2e)^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2\right)$

$\frac{44}{3}\cdot\pi\cdot e^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 8e^3 + \frac{\pi\cdot 4e}{3}\left(4e^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2\right)$

$\frac{44}{3}\cdot\pi\cdot e^3 = \frac{16}{3}\cdot\pi\cdot e^3 + \frac{\pi\cdot 4e}{3}\left(4e^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2\right)$ $\quad\Big|\, -\frac{16}{3}\cdot\pi\cdot e^3$

$\frac{28}{3}\cdot\pi\cdot e^3 = \frac{\pi\cdot 4e}{3}\left(4e^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2\right)$ $\quad\Big|\, \cdot\frac{3}{\pi\cdot 4e}$

$\frac{28}{\cancel{3}}\cdot\cancel{\pi}\cdot e^3\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{\pi}\cdot 4e} = \cancel{\frac{3}{\pi\cdot 4e}\cdot\frac{\pi\cdot 4e}{3}}\left(4e^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2\right)$

$\frac{28\cdot e^3}{4e} = 4e^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2$

$\frac{\cancel{4}\cdot 7\cdot\cancel{e}\cdot e^2}{\cancel{4}\cdot\cancel{e}} = 4e^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2$

$7e^2 = 4e^2 + 2e\cdot r_2 + r_2^2$ — Seiten tauschen

$r_2^2 + 2e\cdot r_2 + 4e^2 = 7e^2$ $\quad\big|\, -7e^2$

$r_2^2 + 2e\cdot r_2 - 3e^2 = 0$ — Normalform einer quadratischen Gleichung

$r_2^2 + 2e\cdot r_2 - 3e^2 = 0$

$x^2 + px + q = 0$ — p und q bestimmen

$p = 2e$

$q = -3e^2$

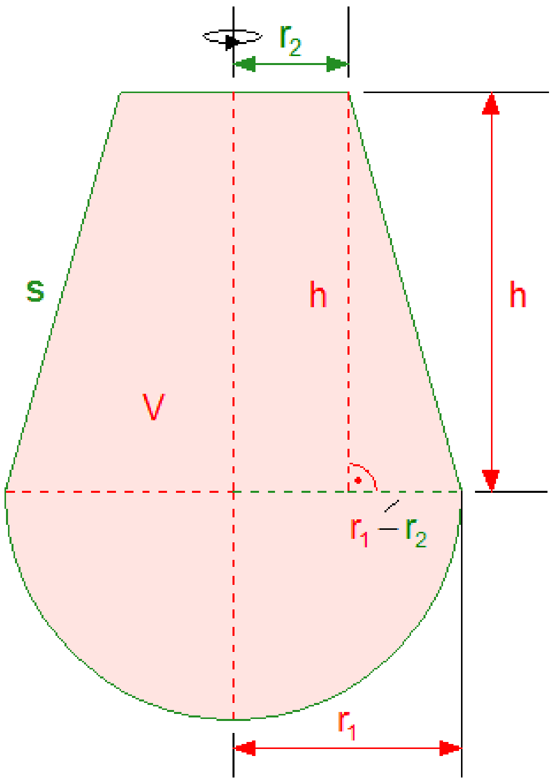
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ — Lösungsformel

$x_{1,2} = -\frac{2e}{2} \pm \sqrt{\frac{(2e)^2}{4} - \left(-3e^2\right)}$

$x_{1,2} = -e \pm \sqrt{\frac{4e^2}{4} + 3e^2}$

$x_{1,2} = -e \pm \sqrt{e^2 + 3e^2}$

$x_{1,2} = -e \pm \sqrt{4e^2}$



Lösung 1994 2c:

$x_{1,2} = -e \pm 2e$

$\underline{x_1} = -e + 2e = \underline{e}$

$\underline{x_2} = -e - 2e = \cancel{-3e}$ keine Lösung, da negativ

$\underline{\underline{r_2 = e}}$

2. Berechnung der Mantellinie s:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen gelben Dreieck

$$s^2 = (4e)^2 + (2e - e)^2$$

$$s^2 = 16e^2 + e^2$$

$$s^2 = 17e^2 \quad |\sqrt{}$$

$$s = \sqrt{17e^2}$$

Wurzelgesetz: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$$s = \sqrt{17} \cdot \sqrt{e^2}$$

$$s = \sqrt{17} \cdot e$$

$$\underline{\underline{s = e\sqrt{17}}}$$